

# МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ ЗАДАЧ: ПРИЛОЖЕНИЯ

## MATHEMATICAL THEORY OF MEASUREMENT PROBLEMS: APPLICATIONS

### КАТАСТРОФИЧЕСКИЙ ФЕНОМЕН КОСМОЛОГИИ<sup>1</sup>

Левин С.Ф. (S. Levin), д.т.н., профессор, зав. кафедрой метрологии и метрологического обеспечения МИЭИ

#### ВВЕДЕНИЕ

В 1922 году Александр Фридман решил гравитационное уравнение для нестационарной модели Вселенной.

Это предсказало закон красного смещения Эдвина Хаббла  $z = (H_0/c) \cdot D$ , где  $H_0$  — постоянная Хаббла,  $c$  — скорость света,  $D$  — расстояние.

В 1946 году нестационарную модель обосновала теория Большого Взрыва (Big Bang) одного из трёх «мушкетёров физики XX-го века» — Георгия Гамова. Его друзья, Дмитрий Иваненко и Лев Ландау, также были выдающимися физиками.



Фридман Александр Александрович (1888-1925)



Хаббл Эдвин Пауэлл (1889-1953)

В 1958 году Вольфганг Маттиг решил модель Фридмана относительно фотометрического расстояния

$$D_L = \frac{q_0 z + (q_0 - 1) \cdot (\sqrt{2q_0 z + 1} - 1)}{(H_0 / c) \cdot q_0^2}$$

где  $q_0$  — параметр замедления.

Теория Гамова предсказывала наличие космического реликтового излучения Big Bang, и оно было обнаружено в 1965 году Арно Пензиасом и Робертом Уилсоном в виде космического микроволнового фона. А господствовавшая в 1970-е годы барионная модель не смогла объяснить проблем образования галактик и небольшой анизотропии реликто-



Гамов Георгий Антонович (1904-1968)

вого излучения. Поэтому в 1980-е годы решение этой проблемы формально дало введение в модель дополнительного параметра — плотности «холодной тёмной материи» (Cold Dark Matter — CDM), составившей 95% массы Вселенной. Многие учёные увлеклись идеей CDM. Позже оказалось, что распределение галактик и анизотропия космического фона противоречат CDM-модели.

И тогда вспомнили  $\Lambda$ -член, введённый в уравнение гравитации Альбертом Эйнштейном для уравнивания сил притяжения, чтобы модель Вселенной была стационарной, но он, признав решение Фридмана 1922 года, назвал эту идею самой неудачной из своих идей.

Однако если  $\Lambda$ -член слегка увеличить, то стационарная модель превратится в модель «расширяющейся Вселенной».

В конце 1990-х годов было обнаружено, что в удалённых галактиках, расстояние до которых было определено по закону Хаббла, сверхновые звёзды типа Ia (SN Ia), используемые в астрометрии как эталоны, имеют яркость ниже расчётной. А расстояние до галактик, вычисленное по SN Ia в них, оказывается больше расстояния согласно оценке постоянной Хаббла.

Сверхновые SN Ia возникают в двойных системах, когда масса «белого карлика» за счёт отбора вещества спутника превышает предел Чандрасекара  $M_{Ch} = (1,41 \pm 0,03) \cdot M_{\odot}$  в массах Солнца. Вспышки SN Ia имеют высокую яркость и на равных расстояниях имеют почти одинаковую яркость. Предпочтение отдали оценкам по SN Ia, откуда следовало, что Вселенная расширяется с ускорением.

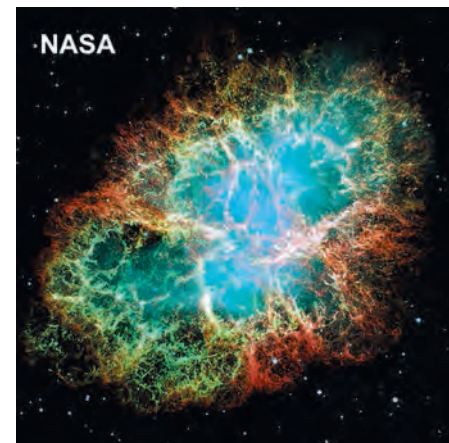
Ускорение расширения Вселенной потребовало введения неизвестного вида энергии с отрицательным давлением — «тёмной энергии». Её приписали именно  $\Lambda$ -члену. И уже  $\Lambda$ CDM-модель подкрепили измерения анизотропии космического микроволнового фона, гравитационного линзирования и дан-

ные о синтезе химических элементов в ходе Big Bang.

Так как в первом приближении упомянутые выше противоречия  $\Lambda$ CDM-модели были разрешены, то к концу XX-го века она стала стандартной, а за открытие «ускорения расширения Вселенной» Сол Перлмуттер [1], Брайан Шмидт [2] и Адам Рисс [3] получили Нобелевскую премию по физике за 2011 год.

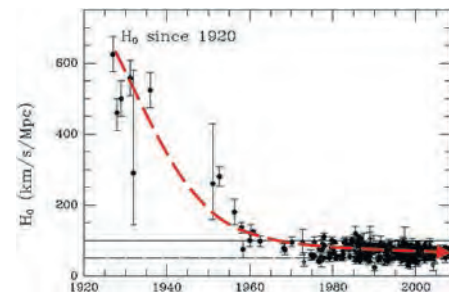
#### «НЕОЖИДАННЫЕ» РЕЗУЛЬТАТЫ

К 2011-му году накопление и статистическая обработка данных астрофизических измерений привели к ряду «неожиданных» результатов.



Крабовидная туманность Taurus A (остаток сверхновой 1054 года SN 1054)

1. Оценка постоянной Хаббла  $H_0 = 530 \text{ км} \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{Мпс}^{-1}$  1929 года к 2001 году понизилась с разбросом у различных исследователей от 64,7 до 124,4  $\text{км} \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{Мпс}^{-1}$  [4], из-за чего ещё в 1970-е годы  $H_0$  называли «переменной Хаббла». И уже в середине 1980-х годов обнаружилась её анизотропия.



«Переменная» Хаббла в 20-м веке [4]

В 21-м веке по данным миссий WMAP [5] и Planck [6] падение  $H_0$  продолжилось до  $67,8 \text{ км} \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{Мпс}^{-1}$  или  $h = 0,678$ .

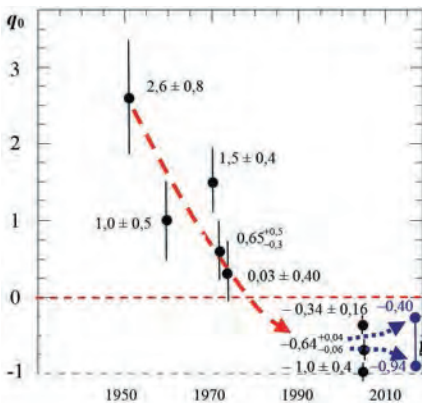
Пали оценки и другого важного параметра космологических моделей — параметра замедления  $q_0$ :  $(2,6 \pm 0,8)$  в

<sup>1</sup>Статья тематически продолжает статьи, опубликованные в КИПис № 6-2009, №№ 1-2-2010, № 5-2012 и № 2-3-2013.

1956 году [7] до  $(-1,0 \pm 0,4)$  в 1998 году [8]. И  $q_0$  стал параметром ускорения, а в 2011 году обнаружилась анизотропия его локальных оценок [9].

В теории измерительных задач явления такого рода связывают с некорректной параметризацией моделей и нарушением условий применимости регрессионного анализа, а при наличии корреляции между оценками параметров — с мультиколлинеарностью [10]. Её при статистической обработке данных WMAP назвали «degeneration  $\Lambda$ CDM-model».

2. «Дегенерация» появилась сначала по спектральному индексу  $n_s$  и оптической толщине  $\tau$  до сферы последнего рассеяния. С ростом объема данных она ослабла. Зато усилилась положительная корреляция между амплитудой флуктуаций плотности галактик в радиусе 8 Мпс и плотностью «холодной темной материи»  $\sigma_8 \times \Omega_c \cdot h^2$ , спектральным индексом и плотностью «барионной материи»  $n_s \times \Omega_b \cdot h^2$ . Усилилась и отрицательная корреляция плотности «темной энергии» с плотностью «холодной темной материи»  $\Omega_\Lambda \times \Omega_c \cdot h^2$  и с амплитудой флуктуаций плотности галактик  $\Omega_\Lambda \times \sigma_8$ . И «паразитная» корреляция поразила все 6 параметров  $\Lambda$ CDM-модели.



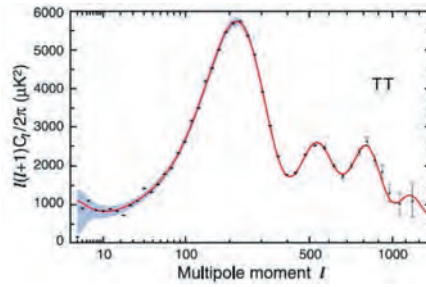
«Падение» параметра замедления

3. Вероятность согласия данных WMAP со спектром угловых флуктуаций микроволнового фона, вычисленного в  $\Lambda$ CDM-модели при его негауссовости, по критерию  $\chi^2$  оказалась всего  $0,02...0,172$  [11].

4. В отчёте WMAP-7 утверждается, что увеличение объема данных измерений за 7 лет в сравнении с объемом данных за 5 лет повысило точность  $\Lambda$ CDM-модели на 50%, введение одного дополнительного параметра — на 50-90%, а введение двух — на 300%.

Если, конечно, не считать дополнительными не имеющими пока физического смысла параметры  $\Omega_c$  и  $\Omega_\Lambda$  подгонки модельных данных под данные измерений. Но в итоговой статье [12] более точная на 300 % модель так и не появилась.

Анализ данных Planck негауссовость флуктуаций не подтвердил, но на масштабах от  $90^\circ$  до  $6^\circ$  вероятность согласия спектра оказалась ещё ниже [6], а ожидаемого в условиях гауссовости уточнения оценок параметров  $\Lambda$ CDM-модели, об-



**Спектр флуктуаций в  $\Lambda$ CDM-модели**  
Акустическим волнам на ранних этапах Big Bang соответствуют пики спектра: 1-й пик — кривизне Вселенной, отношение нечётных пиков к чётным — плотности барионов, 3-й пик — плотности CDM.

ратно пропорционального корню из объема данных, за 9 лет так и не произошло.

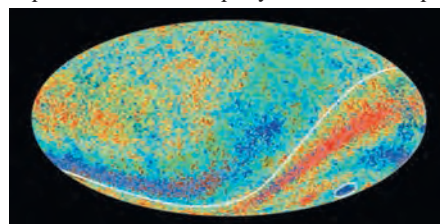
3. Миссия WMAP установила, что геометрия Вселенной в целом евклидова. «Кривизне» остались лишь «чёрные дыры» и крупные галактики как гравитационные линзы. 6. Ия Масанори, анализируя рекордные красные смещения, предсказал, что обнаружение галактик с красными смещениями  $z = 15...20$  из-за нехватки времени на их формирование станет «полномасштабным кризисом  $\Lambda$ CDM-модели».

«Нехватка» времени имеет место и для других следствий  $\Lambda$ CDM-модели. Так, Planck подтвердил обнаружение Большого холодного пятна миссией WMAP, но его размеры оказались гораздо больше.

А в направлении Северного галактического полюса Planck обнаружил в созвездии Сота крупнейшее в наблюдаемой части Вселенной сверхскопление галактик. В направлении же Южного галактического полюса в Eridanus и Aquarius находится система гигантских пустот (void) размерами порядка  $11...150$  Мпс, что в теории Big Bang интерпретируется как флуктуации плотности барионного вещества под воздействием акустических волн на ранних стадиях развития Вселенной. Но еще в 1988 году в созвездии Canes Venatici на расстоянии  $0,47$  Гпс был обнаружен Giant Void диаметром  $300-400$  Мпс, а в 2004 году в Eridanus и Aries на расстоянии  $2-4$  Гпс — Great Void диаметром более  $280$  Мпс. Их размеры плохо вписываются в теорию барионных флуктуаций.

С этой неоднородностью связана дипольная анизотропия микроволнового фона и красного смещения галактик, радиогалактик и квазаров, а также «фиолетовое смещение» в Местном объеме галактик.

Появление крупномасштабных неоднородностей тоже требует большего вре-



Анизотропия температуры на карте Planck [6]:  
Большое холодное пятно в экваториальных координатах

мени на ранних стадиях развития Вселенной, а в  $\Lambda$ CDM-модели Вселенная должна быть изотропной. И по данным миссии Planck понижение оценки постоянной Хаббла увеличило возраст Вселенной с  $13,77$  до  $13,796$  млрд. лет.

7. На логарифмической диаграмме Хаббла линейные характеристики положения для галактик, радиогалактик и квазаров при стандартном параметре наклона  $0,2$  значимо отличаются нуль-пунктами и характеристиками рассеяния, что является признаком нарушения условия статистической однородности. Однако красное смещение используют при определении расстояний так, как если бы оно носило чисто космологический характер.

Более полный обзор нарушений условий применимости статистических методов в космологии дан в работе [13].

«Неожиданные» результаты обычно не комментируют по понятной причине — они не согласуются с Big Bang. И автор с просьбой прокомментировать перечислил их списком на лекции о Big Bang в МГТУ имени Н.Э. Баумана Роджеру Пенроузу.



Сэр Роджер сначала живо откликнулся на этот вопрос, но затем возникла пауза (как заметил профессор Юрий Владимиров, из-за пропуска в синхронном переводе терминов), и лектору пришлось уточнять вопрос у автора.



Ответ всемирно известного философа и космолога был традиционен: «Я не уполномочен комментировать результаты других исследователей».

Автор поблагодарил сэра Роджера за прекрасную лекцию, прочитанную с юношеским задором, ведь 4 марта 2013 года ему исполнилось 82.

Таблица 1

ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ  $\Lambda$ CDM-МОДЕЛИ ПО ДАННЫМ МИССИЙ WMAP И PLANCK С  $1\sigma$ -ГРАНИЦАМИ

Параметр	WMAP: 3-й год	WMAP: 5-й год	WMAP: 7-й год	WMAP: 9-й год	Planck: 15,5 месяцев
$\Omega_b \cdot h^2$	$0,02229 \pm 0,00073$	$0,02273 \pm 0,00062$	$0,02258^{+0,00057}/_{-0,00056}$	$0,02264 \pm 0,00050$	$0,02217 \pm 0,00033$
$\Omega_c \cdot h^2$	$0,1054 \pm 0,0078$	$0,1099 \pm 0,0062$	$0,1109 \pm 0,0056$	$0,1138 \pm 0,0045$	$0,1186 \pm 0,0031$
$\Omega_\Lambda$	$0,759 \pm 0,034$	$0,742 \pm 0,030$	$0,734 \pm 0,029$	$0,721 \pm 0,025$	$0,693 \pm 0,019$
$n_s$	$0,958 \pm 0,016$	$0,963^{+0,014}/_{-0,015}$	$0,9358 < n_s < 0,9921$	$0,95 < n_s < 1,00$	$0,9635 \pm 0,0094$
$\tau$	$0,089 \pm 0,030$	$0,087 \pm 0,017$	$0,088 \pm 0,015$	$0,089 \pm 0,014$	$0,089 \pm 0,032$
$\sigma_8$	$0,761^{+0,049}/_{-0,048}$	$0,796 \pm 0,036$	$0,801 \pm 0,030$	$0,821 \pm 0,023$	$0,823 \pm 0,018$

$\Omega_b \cdot h^2$  — плотность барионов,  $\Omega_c \cdot h^2$  — плотность «холодной темной материи»,  $\Omega_\Lambda$  — плотность «темной энергии»;  $n_s$  — спектральный индекс,  $\tau$  — оптическая толщина до сферы последнего рассеяния;  $\sigma_8$  — амплитуда флуктуаций плотности галактик в радиусе 8 Мпс.

Таблица 2

ЭФФЕКТЫ УВЕЛИЧЕНИЯ ЧИСЛА M ПАРАМЕТРОВ  $\Lambda$ CDM-МОДЕЛИ ПО ДАННЫМ WMAP-7

$\Lambda$ CDM-модель и ее модификации	M*	R**	Оценка параметра	Параметр h
$\Lambda$ CDM $\{\Omega_b \cdot h^2, \Omega_c \cdot h^2, \Omega_\Lambda, \sigma_8, n_s, \tau\}$ — стандартная модель	6	1,5	—	$0,710 \pm 0,025$
$\Lambda$ CDM + r (тензорно-скалярное отношение)	7	1,9	$< 0,36$ (95% CL)	$0,675 \pm 0,038$
$\Lambda$ CDM + $\frac{dn_s}{d \ln k}$ (логарифмическая производная спектрального индекса)	7	1,7	$-0,034 \pm 0,026$	$0,735 \pm 0,032$
$\Lambda$ CDM + r + $\frac{dn_s}{d \ln k}$	8	3,0	$< 0,49$ (95% CL); $-0,048 \pm 0,029$	$0,691^{+0,040}/_{-0,41}$
$\Lambda$ CDM + $\alpha_1$ (параметр эквивалентной кривизны CDM с корреляцией «-1»)	7	1,9	$< 0,011$ (95% CL)	$0,745^{+0,031}/_{-0,30}$
$\Lambda$ CDM + $\alpha_0$ (параметр эквивалентной кривизны CDM с корреляцией «0»)	7	1,9	$< 0,13$ (95% CL)	$0,736 \pm 0,032$
$\Lambda$ CDM + N <i>eff</i> (масса нейтрино)	7	1,8	$> 2,7$ (95% CL)	$0,826^{+0,089}/_{-0,087}$
$\Lambda$ CDM + $\Omega_k$ (параметр пространственной кривизны)	7	1,8	$-0,080^{+0,071}/_{-0,093}$	$0,53^{+0,13}/_{-0,15}$
$\Lambda$ CDM + w (параметр состояния темной энергии)	7	1,5	$-1,12^{+0,42}/_{-0,43}$	$0,75^{+0,15}/_{-0,14}$

\* Число параметров. \*\* Отношение факторов точности моделей при использовании данных WMAP-5/WMAP-7.

И хотя вопрос о «неожиданных результатах в космологии» был единственным, от ответа на который сэр Роджер дипломатично уклонился, специалисты, явно не приверженцы Big Bang, с большим удовлетворением отреагировали на саму постановку вопроса.

Заметим, роль метрологии в космологии сводится к оцениванию погрешностей неадекватности моделей и вероятностей их согласия с данными астрофизических измерений не зависимо от того, каким образом эти модели получены. И, конечно, шкалами измерений и аттестацией методик решения измерительных задач.

ПАРАДОКСЫ ШКАЛЫ КОСМОЛОГИЧЕСКИХ РАССТОЯНИЙ

Комментировать неожиданные результаты пришлось на XV-й Международной конференции «Физические интерпретации теории относительности» PIRT-2013, где автор руководил одной из сессий.

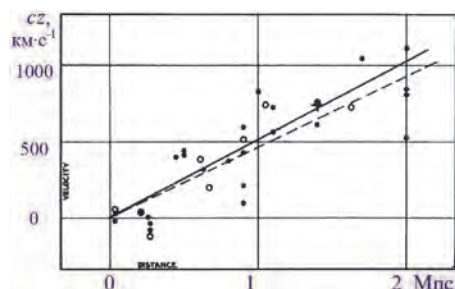


Диаграмма Хаббла 1929 года «лучевая скорость — расстояние» [14]

Падение оценок  $H_0$  обычно объясняют тем, что измерения охватывали галактики в радиусе  $\sim 2$  Мпс.

Завышенные оценки  $H_0$  получились и за счёт заниженных оценок расстояний.

Проверка показала, что для галактик каталога NGC 5206, 5408, 4945 и 5128 в радиусе 3,6 Мпс средняя лучевая скорость составила  $550 \text{ км} \cdot \text{с}^{-1}$ , а для ряда галактик каталога NGC в радиусе 1 Мпс — была в пределах  $(-160 \dots -250) \text{ км} \cdot \text{с}^{-1}$  [15]. И у этих галактик, самая известная из них — Туманность Андромеды, не красное, а фиолетовое смещение.

Странно, как вообще в этих условиях Эдвин Хаббл открыл закон красного смещения.

Для  $\lg(cz)$  как функции наблюдаемой звездной величины m диаграмма Хаббла является линейной с наклоном 0,2 и отличается для объектов с различной абсолютной светимостью  $\mu$  только нуль-пунктом:

$$\lg cz = (\lg H_0 - 5 - 0,2 \cdot \mu) + 0,2 \cdot m.$$

Это особенно заметно для квазаров — извлечение из выборки [15] всего двух квазаров, 3С 280.1 и 3С 273.0, резко изменяет наклон диаграммы Хаббла (рис. 1) [16].

Это — признак статистической неоднородности данных о квазарах и радиогалактиках.

Вторая группа парадоксов связана с результатами миссии WMAP, которые критически оценивают в ГАИШ при МГУ имени М.В. Ломоносова (см. Ки-Пис, 2012, № 5). Это связано не только с «открытиями» путём объединения стати-



Туманность Андромеды (M31)

стически неоднородных и неравноточных данных различных экспериментов методом среднего взвешенного и с негатового фона, но и с низкой вероятностью согласия спектра флуктуаций  $\Lambda$ CDM-модели с данными WMAP. В этой связи большие надежды возлагались на существенно более точные данные Planck. И они превзошли все ожидания.

Комментарий Planck Collaboration [6]: «Красные точки — результаты измерений. Вертикальные красные линии соответствуют погрешностям измерений. Зеленая кривая — расчетные данные лучшей версии стандартной модели. Бледно-зеленая область — предсказания всех вариантов стандартной модели. В угловых масштабах больших  $6^\circ$  есть точка данных, погрешности которых находятся за допустимыми пределами ( $1\sigma$ -ми? — авт.). В целом же средняя кривая на начальном участке,

построенная по фактическим данным, идет ниже предсказаний наилучших моделей. Эти несоответствия модели микроволнового фона могут бросить вызов основам космологии, причём некоторые аспекты стандартной космологической модели, возможно, придется пересмотреть».

За цитирование выделенной части отчёта Planck, когда автор, сойдя с трибуны после доклада, проходил мимо одного из ведущих специалистов ГАИШ, тот шепнул: «Это не профессионально».

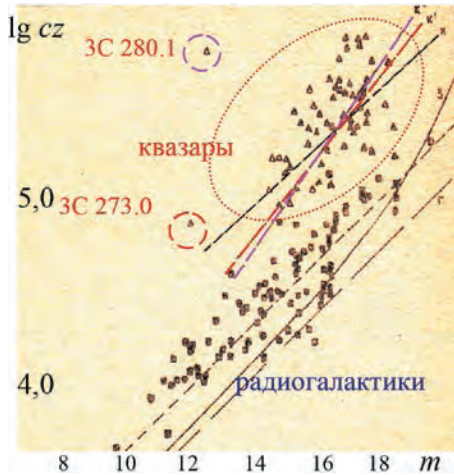


Рис. 1. Диаграмма Хаббла 1974 года

С этим можно было бы согласиться, если бы в [6] не было бы отмечено: «Эти результаты выдвигают на первый план зрелость и высокую точность, достигнутые в нашем понимании Вселенной, и в то же самое время возмущают начало новой эпохи, в которой больше нельзя игнорировать крошечные, но значимые отклонения от текущей стандартной космологической модели на низших мультиполях».

Миссия Planck не подтвердила негауссовость флуктуаций микроволнового фона, что привлекло внимание к оценкам точности  $\Lambda$ CDM-модели.

Во-первых, среднее арифметическое суммы  $N$  независимых гауссовых величин с параметром рассеяния  $\sigma$  — это гауссова величина с параметром рассеяния  $\sigma/N^{1/2}$  [17]. Однако  $1\sigma$ -границы оценок параметров  $\Lambda$ CDM-модели за 9 лет измерений WMAP изменились не более чем на 1% (табл. 1).

Во-вторых, в упомянутом отчёте WMAP-7 о росте точности  $\Lambda$ CDM-

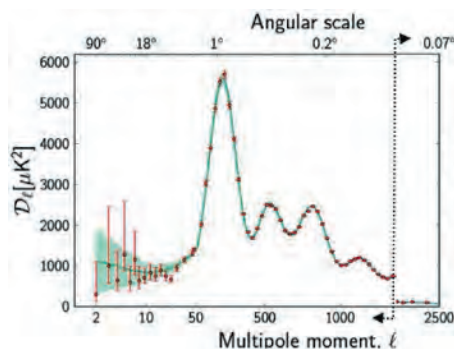


График спектра колебаний температуры микроволнового фона по данным миссии Planck [6]

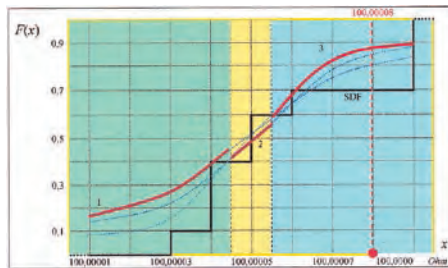


Схема перекрёстного наблюдения для модели распределения с 2 параметрами

модели до 300% за счёт дополнительных параметров фактором точности был корень квадратный из детерминанта матрицы ковариации параметров модели.

Так структурную идентификацию модели заменили введением 2-х параметров для «наилучшей аппроксимации».

Тем не менее, о реальной точности  $\Lambda$ CDM-модели всё-таки можно судить по точности косвенных оценок постоянной Хаббла  $h$ , полученных для различных модификаций модели введением дополнительных параметров (табл. 2).

Введение дополнительных параметров  $\Lambda$ CDM-модели во всех случаях увеличило  $1\sigma$ -е границы косвенных

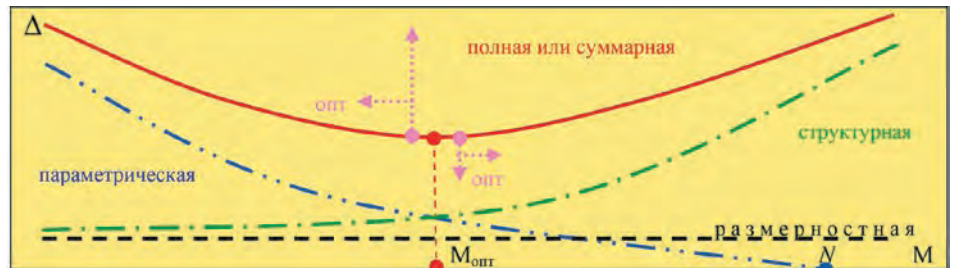


Рис. 2. Взаимосвязь составляющих погрешности неадекватности для математических моделей объектов измерений

оценок постоянной Хаббла, причём в случаях введения параметров  $\Omega_k$  и  $w$  — почти на треть.

Команду WMAP подвело то, что погрешности аппроксимации при увеличении числа параметров модели уменьшаются и модель «проходит» через всё большее число т.н. опорных отсчётов, а погрешности между отсчётами остаются ненаблюдаемыми.

Погрешность неадекватности модели определяется как погрешность предсказания моделью новых данных измерений. Её оценивают в схеме перекрёстного наблюдения, когда данные измерений разделяют на пробную и контрольную части. На пробной части оценивают параметры модели, экстраполируя её на контрольную часть, потом — наоборот, крест-накрест (см. КИПиС, 2006, № 3-5).

Погрешности модели на пробной части характеризуют параметрическую составляющую, на контрольной части — сумму структурной и параметрической составляющих, а размерностную составляющую — погрешности измерений.

Алгоритм идентификации методом наименьших квадратов по критерию минимума погрешности неадекватности обозначают ММКМНК, методом наименьших

модулей — ММКМНМ, медианной интерполяцией — ММКМЕДС [18].

Минимум погрешности неадекватности модели достигается при балансе структурной и параметрической составляющих, когда вероятность согласия распределений погрешностей аппроксимации и экстраполяции максимальна. С ростом погрешностей измерений минимум смещается в сторону меньшего числа параметров, а с уменьшением — в сторону большего (рис. 2).

Этот минимум связан с «идеальностью моделей объектов измерений в качественном и количественном отношении», долгое время не получавшей в метрологии корректной интерпретации.

**ГРАВИТАЦИОННОЕ КРАСНОЕ СМЕЩЕНИЕ**

В 1967 году опытный астроном Хелтон Арп, в Далеком прошлом — ассистент Эдвина Хаббла, собрав каталог взаимодействующих галактик и квазаров с существенно различающимися красными смещениями, предположил, что аномально большие красные смещения квазаров не соответствуют закону Хаббла. Так, на фоне галактики NGC 7319 при  $z = 0,0225$  чётко виден квазар с  $z = 2,11$  [19].

Гипотезу Хелтона Арпа поддержали Джефри и Маргарет Бербиджи [20]: они отметили, что диаграмма Хаббла для квазаров — это функция их светимости, и предложили для их красного смещения модель

$$z = (1+z_g)(1+z_k) - 1 \quad (1)$$

с двумя составляющими — космологической (закон Хаббла)

$$z_k = (H_0/c) \cdot D_L$$

и гравитационной

$$z_g = \frac{1}{\sqrt{1-2GM/(rc^2)}} - 1, \quad (2)$$

где  $G$  — гравитационная постоянная,  $M$  и  $r$  — соответственно масса и радиус объекта, или

$$z_g \xrightarrow{GM/(rc^2) \ll 1} GM/(rc^2).$$

Джон Гринстейн и Маартен Шмидт связали  $z_k$  с «расширением Вселенной» и отметили, что возможность гравитационного красного смещения нельзя не учитывать. Обычно им пренебрегают и в целом модель (1) не рассматривают.

В 1971 году Владимир Брагинский в эксперименте подтвердил равенство инертной и гравитационной масс с расхождением менее  $10^{-12}$  [21].

(Продолжение следует)

# МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ ЗАДАЧ: ПРИЛОЖЕНИЯ

## MATHEMATICAL THEORY OF MEASUREMENT PROBLEMS: APPLICATIONS

### КАТАСТРОФИЧЕСКИЙ ФЕНОМЕН КОСМОЛОГИИ

Левин С.Ф. (S. Levin), д.т.н., профессор, зав. кафедрой метрологии и метрологического обеспечения МИЭИ

(Окончание, начало см. № 3-2014)

В 1992 году Хелтон Арп предположил, что собственное красное смещение  $z_0$  квазара определяется абсолютной светимостью  $\mu$  (К-эффект), причём в [22] показано, что

$$z_0 = K \cdot 10^{-0,2\mu}, \quad (3)$$

где  $K = 2,6 \cdot 10^{-6}$  — параметр наклона линии регрессии, построенной по данным измерений лучевых скоростей. Замена гравитационной составляющей  $(1+z_g)$  на собственную  $(1+z_0)$  привела к обнаружению явления «auto fitting» под строгое решение уравнения Маттига при  $q_0 < 1$  [23]:

$$z_k = q_0 \frac{D_L}{R_0} - (q_0 - 1) \left[ \sqrt{1 + 2 \frac{D_L}{R_0}} - 1 \right], \quad (4)$$

где  $R_0 = c/H_0$  — радиус Хаббла.

Но гравитационное красное смещение  $z_{gc} = 2,17 \cdot 10^{-6}$  на лимбе Солнца при абсолютной звездной величине  $\mu_c = 4,79$  [7] разошлось с расчетным значением согласно (3):

$$z_{0c} = 2,6 \cdot 10^{-6 \cdot 0,2 \cdot 4,79} = 2,864 \cdot 10^{-7}.$$

Теперь потребовалось выразить модель (2) через наблюдаемые величины?

Для светимости объекта радиусом  $r$  с эффективной температурой  $T_e$  соотношение Стефана-Больцмана имеет вид

$$L = 4\pi\sigma \cdot r^2 T_e^4,$$

где  $\sigma$  — постоянная Стефана-Больцмана, а масса связана со светимостью как

$$L = L_C \cdot (M/M_C)^\alpha,$$

где  $L_C$  и  $M_C$  — светимость и масса Солнца [7]. Для  $M \gg M_C$  и в случаях, когда непрозрачность среды определяется процессами рассеяния на свободных электронах и доминирует давление излучения, показатель  $\alpha \rightarrow 1$ . Если учесть соотношением между светимостью и абсолютной звездной величиной  $\mu$  галактик [7]

$$L = L_C \cdot 10^{0,4(\mu_c - \mu)},$$

и то, что  $M = M_C \cdot 10^{0,4(\mu_c - \mu)/\alpha}$ , тогда

$$\frac{GM}{r^2} = \frac{GM_C}{c^2} \cdot 10^{0,2(\mu_c - \mu)} \sqrt{\frac{4\pi\sigma T_e^4}{L_C}}.$$

Окончательно

$$z_g = \frac{1}{\sqrt{1 - 2K_g T_e^2 \cdot 10^{-0,2\mu}}} - 1, \quad (5)$$

где  $K_g = 5,76 \cdot 10^{-13} \text{ К}^{-2}$ , так как

$$K_g = \frac{GM_C}{c^2} \cdot 10^{0,2\mu_c} \sqrt{\frac{4\pi\sigma}{L_C}}.$$

Для эффективной температуры Солнца  $T_{eC} = 5784 \text{ К}$  [7] согласно соотношению (5)

$$z_{gC} = 2,12 \cdot 10^{-6},$$

что уже вполне приемлемо, и тем самым К-эффект в линейном приближе-

нии (5) по данным [22] не отличается от гравитационного красного смещения при  $T_e = 2125 \text{ К}$ .

Гравитационное красное смещение можно выразить через эффективную температуру, фотометрическое расстояние  $D_L = 10^{-5+0,2(m-\mu)}$  и видимую звездную величину квазара  $m$ :

$$z_g = \frac{1}{\sqrt{1 - 2K_g T_e^2 D_L 10^{5-0,2m}}} - 1, \quad (6)$$

а при  $K_g T_e^2 D_L 10^{5-0,2m} \ll 1$

$$z_g \cong K_g T_e^2 D_L 10^{5-0,2m},$$

и модель (1) принимает вид

$$z = \frac{1 + z_k}{\sqrt{1 - 2K_g T_e^2 D_L 10^{5-0,2m}}} - 1 \quad (7)$$

или, в линейном приближении,  $z \cong (1 + K_g T_e^2 D_L 10^{5-0,2m}) \cdot (1 + z_k) - 1$ .

Для космологической составляющей  $z_k$  в качестве конкурирующих моделей по данным об угловых координатах, звездных величинах и красных смещениях галактик, радиогалактик и квазаров в [24] были рассмотрены решения уравнения Маттига (4) при  $q_0 = \{-1/2; 0; 1/2; 1\}$  и интерполяционная модель [16]

$$z_k = \frac{D_L}{R_0} \cdot [1 + k \cdot \frac{D_L}{R_0}]^k \quad (8)$$

с параметром формы  $k = -1$  для оценки постоянной Хаббла  $H_0 = (74,2 \pm 3,6) \text{ км} \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{Мпс}^{-1}$ .

Решение системы уравнений (1) по данным [10] о 201 квазаре принесло неожиданный результат: космологическая составляющая красного смещения квазаров оказалась независимой от угловых координат, изотропной, что в космологии является постулатом.

Для решения уравнения Маттига при  $q_0 = 1$  (это соответствует закону Хаббла) и интерполяционной модели (8) с разрывом 2-го рода статистический разброс составил по красному смещению как функции фотометрического расстояния  $10^{-13} \dots 10^{-14}$ , т.е. практически на уровне «машинного нуля» (подробнее КИПиС: 2012, № 5; 2013, № 2).

В этой связи возник новый вопрос, каковы должны быть критерии структурной идентификации моделей в области «машинного нуля»?

Сравнение закона Хаббла и модели (8) с  $k = -1$  показало:

1) точка разрыва модели (8)  $R_0 = c/H_0 = (13,16^{+0,67}_{-0,61}) \cdot 10^9 \text{ св. лет}$ . Это меньше «возраста» Вселенной  $T_{\text{WMAP-9}} = 13,74 \cdot 10^9 \text{ лет}$  и  $T_{\text{plank}} = 13,796 \cdot 10^9 \text{ лет}$ , но для  $H_{0\text{plank}} = 67,80 \text{ км} \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{Мпс}^{-1}$   $T_{(8)} = 14,41 \cdot 10^9 \text{ лет}$ ;

2) параметр  $H_0/c = 1/R_0$  в законе Хаббла имеет функциональный смысл лишь параметра наклона и структурных ограничений на рост лучевой скорости  $c \cdot z$  не накладывает. В модели же (8)  $R_0$  имеет смысл естественного ограничения.

3) закон Хаббла как линейная зависимость лучевой скорости от фотометрического расстояния при доплеровской интерпретации  $z_k$  и при  $z_0 \sim 0$  даёт шкалу вида

$$D_L = [(1+z)^2 - 1] / [(1+z)^2 + 1]. \quad (9)$$

Шкала же фотометрических космологических расстояний на основе модели (8) в линейном приближении для собственной составляющей красного смещения квазаров, объединив диаграмму и закон Хаббла по наблюдаемым красным смещениям  $z$  и звездным величинам  $m$  на интервале  $(0,21 \dots 9,16) \cdot 10^9$  световых лет, приняла вид [24]

$$D_L = \frac{z}{(1+z) / R_0 + K \cdot 10^{5-0,2m}} \quad (10)$$

и изменила оценки расстояний до квазаров и их абсолютных светимостей. И если расстояние выразить через запаздывание, то «раньше» квазары в среднем были ярче (рис. 3).

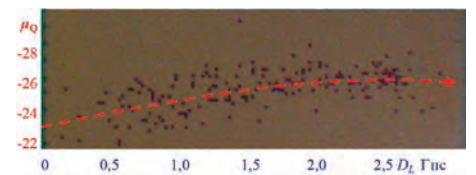


Рис. 3. Абсолютные светимости квазаров на шкале расстояний (10)

Это обстоятельство из-за несоответствия космологического возраста времени для формирования неоднородностей в виде сверхскоплений галактик и гигантских пустот ослабляет указанное Ия Масанори ограничение на красные смещения в  $\Lambda$ CDM-модели;

4) уравнение (1) с моделью (7) для шкалы космологических расстояний

$$\left(1 - \frac{D_L}{R_0}\right) \sqrt{1 - 2K_g T_e^2 D_L 10^{5-0,2m}} = \frac{1}{1+z}$$

сводится к кубическому уравнению относительно  $D_L$ . Его решение для выборки из 201 квазара [10] при их «стандартной» эффективной температуре  $T_{e0} = 30000 \text{ К}$  [20] даёт расстояние до верхней границы выборки 90 Мпс.

Это значит, что «стандартная» эффективная температура квазаров [20] не согласуется с их видимой звездной величиной, либо Хелтон Арп прав, и квазары находятся гораздо ближе, чем это принято.

Либо астрофизические формулы [10] требуют уточнения.

Скорее всего, можно уточнить шкалу космологических расстояний, учитывая эффективную температуру внегалактических объектов. Но, к сожалению, таких стандартизованных данных пока нет.

А критерием структурно-параметрической идентификации модели должны быть эффекты, предсказываемые моделью без введения дополнительных параметров.

И ещё одно важное обстоятельство — без использования критериев, придающих большие веса наименее вероятным отсчётам из совокупности.

Таким критерием является известный критерий  $\chi^2$ .

У этого критерия есть другой не менее важный недостаток — не регламентированное группирование данных. Оно позволяет подгонять их под «требуемое» распределение вероятностей.

### «НЕОЖИДАННЫЕ» СОВПАДЕНИЯ

Кроме «неожиданных» результатов имеет место и ряд «неожиданных» совпадений.

Первым из них стала гравитационная составляющая наблюдаемого красного смещения квазаров (6). Диполь её анизотропии совпал с галактической полярной осью. А она совпадает с диполями анизотропии микроволнового фона, красного смещения галактик и локальных оценок параметра ускорения, а также с направлением оси «система гигантских пустот Aquarius и Eridanus → крупнейшая система сверхскоплений галактик Leo и Virgo», которую обнаружил Plank и которую можно назвать диполем неоднородности в центре окон прозрачности Млечного пути.

Этим удивительные совпадения не ограничались.



Сверхскопления галактик с диполями микроволнового фона, красного смещения и параметра ускорения

В 1973 году было показано, что кривые вращения спиральных галактик не совпадают с теорией Иоганна Кеплера из-за наличия гало ненаблюдаемого вещества [25] — «тёмной материи» (рис. 3).

В 1983 году Хелтон Арп обнаружил, что в Местном объеме галактик в группах M81 и M31 красное смещение центральных спиральных галактик меньше, чем у карликовых компаньонов (рис. 4). В группу M31 входят Туманность Андромеды, Галактика (MW), Большое (LMC) и Малое (SMC) Магеллановы облака. Но в это не поверили.

На рост локальной постоянной Хаббла в Местном  $H_0$  в радиусе 1...2 Мпс в 1986 году указал Аллан Сэндейдж. В 1988 году

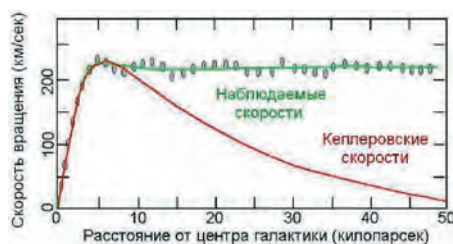


Рис. 3. Кривая вращения спиральной галактики [26]

Брент Талли обнаружил пик  $H_0'$  до  $90 \text{ км}\cdot\text{с}^{-1}\cdot\text{Мпс}^{-1}$  в диапазоне 7...30 Мпс. А в 1997 году Игорь Караченцев и Дмитрий Макаров обнаружили моду  $H_0'$  (рис. 5) при среднеквадратическом отклонении скоростей галактик  $(72 \pm 2) \text{ км}\cdot\text{с}^{-1}$ .

Дополняют эти факты эпоха начала ускоренного расширения Вселенной  $\sim 6 \cdot 10^9$  лет тому назад и «аномалия Пионеров».

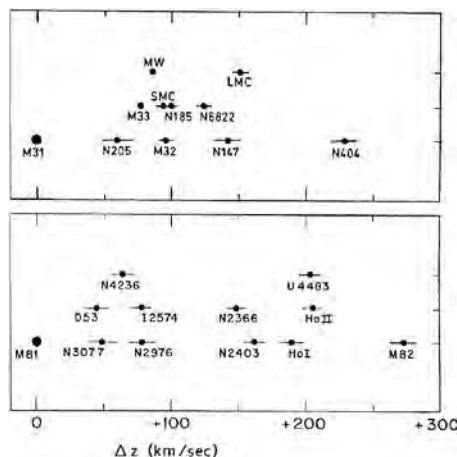


Рис. 4. Лучевые скорости в группах галактик M31 и M81 [27]

Pioneer-10 был запущен 2 марта 1972, а Pioneer-11 — 5 апреля 1973 года. Совершив манёвр у Юпитера, аппараты полетели в противоположные стороны. А в 1980 году анализ доплеровских траекторных измерений показал, что за вычетом известных эффектов аппараты испытывают очень малое тормозящее ускорение  $(8,74 \pm 1,33) \cdot 10^{-10} \text{ м}\cdot\text{с}^{-2}$  [28]. Оно проявилось как малое повышение несущей частоты сигнала. Его списали на неучтенное асимметричное тепловое излучение, но это объясняло только 70 % аномалии.

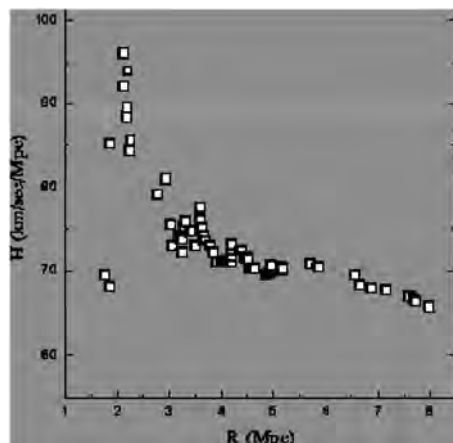


Рис. 5. Локальная постоянная Хаббла в Местном объёме галактик [15]

К 1998 году шкалу космологических расстояний в силу её неточности заменило указание красного смещения при доплеровской интерпретации, и основной результат в [1] был сформулирован так: «переход между замедлением и ускорением произошел тогда, когда взорвалась SN 1997G, более чем  $6 \cdot 10^9$  лет назад, что соответствует  $z \approx 0,73$ ».

В модели (8) при  $k = -1$

$$z_k = (D_L/R_0)/(1-D_L/R_0) \quad (11)$$

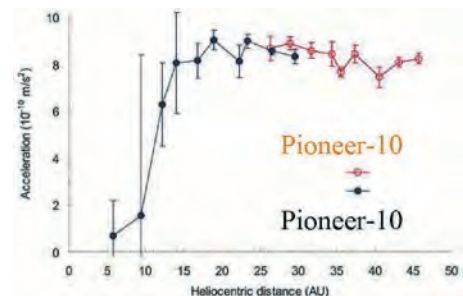
рост красного смещения с расстоянием для эффекта Доплера

$$z_v = \sqrt{(c+v)/(c-v)} - 1 \quad (12)$$

соответствует увеличению скорости удаления объектов от наблюдателя. А из формул (11) и (12) следуют эквивалентные эффекту Доплера зависимости от расстояния для скорости  $V$  и ускорения  $W$  (рис. 6). И не трудно заметить, что скорость «расширения Вселенной»  $V$  монотонно нарастает от 0 до  $c$ , а ускорение расширения в точке разрыва  $W(R_0)$  падает до нуля. По мере приближения к наблюдателю ускорение возрастает до  $9,59 \cdot 10^{-10} \text{ м}\cdot\text{с}^{-2}$  при  $D_L = 5,43 \cdot 10^9$  световых лет и затем падает до уровня

$$W(0) = c \cdot H_0 = 7,21 \cdot 10^{-10} \text{ м}\cdot\text{с}^{-2}.$$

Расстоянию  $5,43 \cdot 10^9$  световых лет по шкале (10) соответствует красное смещение 0,732 «эпохи начала ускоренного расширения Вселенной» [1]. При этом эквивалентное ускорение знака не меняет, а совпадение получилось без усложнения варианта модели (8) ещё 1966 года [16].



Аномальное ускорение аппаратов Pioneer-10 и Pioneer-11 [28]

Ещё удивительнее то, что позже анализ «аномалии Пионеров» за вдвое больший промежуток времени [29] показал, что на 10% более точный результат даёт гипотеза об экспоненциальном изменении ускорения. За счёт этого оценка аномального ускорения аппарата Pioneer-10 на 23-м году полета снизилась до указанного ранее в модели (11) значения  $W(0) = 7,21 \cdot 10^{-10} \text{ м}\cdot\text{с}^{-2}$  [24] с тенденцией к дальнейшему росту. Однако проследить её не удалось. Pioneer-11 замолчал в ноябре 1995 года в  $6,5 \cdot 10^9$  километрах от Солнца, а Pioneer-10 — в январе 2003 года в  $12 \cdot 10^9$  км.

Проблема в том, что торможение аппаратов при доплеровской интерпретации аномалии означает то, что сигналы аппаратов Pioneer подвержены не красному, а фиолетовому смещению.

Проблема «аномалии Пионеров» сводится к вопросу о причине точного совпадения значений ускорения, но с обратным знаком, и об объекте аномалии — действительно ли изменяется скорость аппаратов или только частота сигнала.

Правда, если рассматривать расстояние как функцию времени запаздывания, то знак минус появляется сам собой.

Другое совпадение.

Аллан Сэндейдж в 1970-е годы заметил, что оценка постоянной Хаббла не зависит ни от направления, ни от интервала усреднения, как внутри, так и за пределами ячеек однородности Вселенной размером порядка 300 Мпс, а однородный поток Хаббла наблюдается с расстояний порядка 1,5...2,0 Мпс. Но в нём есть и фиолетовая составляющая — 37 галактик Местного объема, вытянувшиеся подковой между узлами эклиптики в созвездиях Andromeda, Draco, Camelopardalis, Ursa Minor и Pegasus с центром на границе Virgo и Leo (рис. 7а). Центр подковы совпал с максимумом температуры микроволнового фона, апексом движения Солнца относительно него и диполем анизотропии красного смещения внегалактических источников (рис. 7вг). В то же время 167 галактик с красным смещением более равномерно сгруппировались к Северному галактическому полюсу в Canes Venatici, Coma, Virgo и Centaurus (рис. 7б).

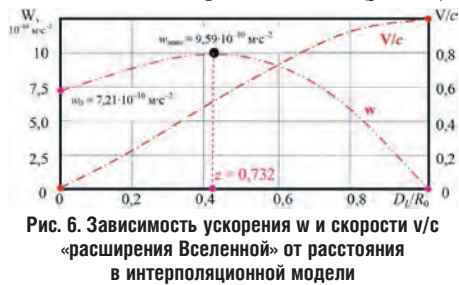
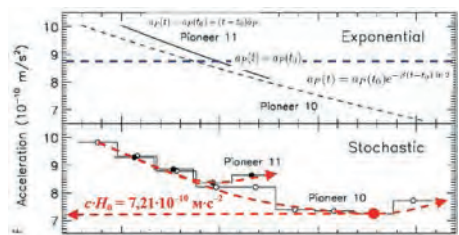


Рис. 6. Зависимость ускорения  $w$  и скорости  $v/c$  «расширения Вселенной» от расстояния в интерполяционной модели

Это значит, что в Местном объеме есть нечетко выраженный красно-фиолетовый «диполь» лучевых скоростей, которые почему-то считаются пекулярными и случайными, тогда как фиолетовое смещение образует по оси диполя красного смещения конический хвост.

Галактикам Местного объема по оси «диполя» в узлах эклиптики на интервале от 4,09 до 19,0 Мпс соответствует оценка характеристики положения со структурными изменениями [14] (рис. 8а). При этом объединение галактик на интервале от -2,3 до 10,4 Мпс для непрерывной зависимости дает в 90%-х толерантных границах  $\pm 193,876 \text{ км}\cdot\text{с}^{-1}$   
 $y = c \cdot z = -151,761 + 72,846 \cdot D$   
с параметром наклона, близким  $H_0 = (72 \pm 3 \pm 7) \text{ км}\cdot\text{с}^{-1}\cdot\text{Мпс}^{-1}$  [4] и  $(74,2 \pm 3,6) \text{ км}\cdot\text{с}^{-1}\cdot\text{Мпс}^{-1}$  [8], а лучевая скорость в нуль-пункте  $-151,761 \text{ км}\cdot\text{с}^{-1}$  (рис. 8б) косвенно указывает на то, что нуль-пункт шкалы находится в области повышенного гравитационного потенциала.



Статистика данных о динамике «аномалии Пионеров» по годам полёта [29]

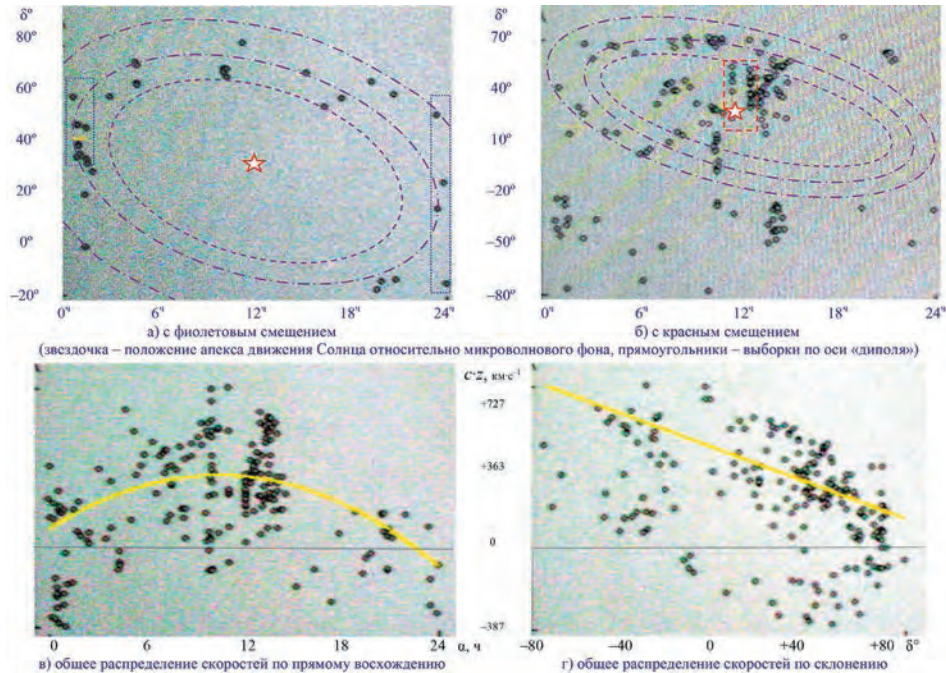


Рис. 7. Распределение лучевых скоростей галактик Местного объема по небесной сфере в экваториальных координатах

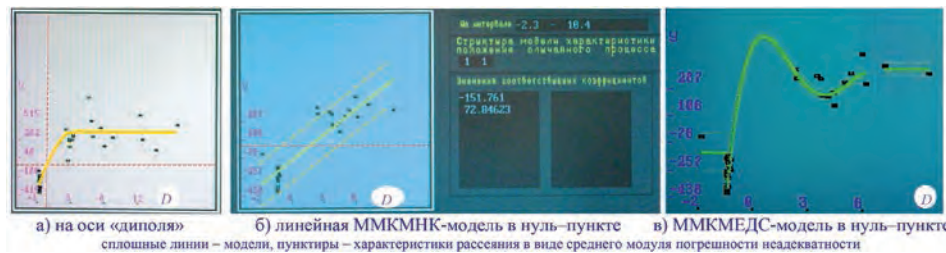


Рис. 8. Распределение лучевых скоростей галактик в Местном объёме (программа ММК-СТАТ [14])

Ненулевая скорость в нуль-пункте может быть связана с тем, что большинство в Местном объёме составляют карликовые неправильные галактики. Гравитационным смещением в их спектрах можно было бы пренебречь, но расширение модели (1) пекулярным эффектом Доплера означало бы, что из 167 галактик с красным смещением осталось бы 9.

Переход от непрерывных линейных моделей (рис. 8б) к нелинейным моделям со структурными изменениями более чем в 4 раза сократило погрешности неадекватности и дало совпадение с пиком лучевой скорости на расстояниях порядка 2 Мпс (рис. 5).

Эти пики указывают на наличие вокруг спиральных галактик «гало темного вещества», в котором находятся карликовые галактики-спутники с более высокими красными смещениями. И если гало связано с вращательным движением, то можно допустить его существование, только гораздо меньших размеров, у планетных систем и отдельных планет. Это даёт объяснение неправильностям движения космических аппаратов при гравитационных манёврах у Земли и аномалиям орбит ряда астероидов Солнечной системы.

Да и «аномалия Пионеров» появилась после их манёвров у Юпитера.

Таким образом, фиолетовое смещение в Местном объёме — продолжение красного. Избыточные красные смеще-

ния в группах галактик связаны с гравитационными аномалиями «темного вещества», а однородный «поток Хаббла» начинается гораздо ближе, чем указывал Аллан Сэндейдж.

Вопрос же о нуль-пункте шкалы космологических расстояний остается открытым.

И ещё одно совпадение, примитивное, но показательное — чисто кинематическая модель разлёта источников излучения с постоянными скоростями и постоянной скоростью распространения излучения при отсутствии гравитации с наблюдателем в центре.

В этом случае закон Хаббла в первоначальном линейном виде для скоростей «разбегания» получается сразу за счёт упорядочивания и с учётом запаздывания принимает вид

$$V_0 = D/(t-D/c),$$

где  $V_0$  — начальная скорость,  $D$  — наблюдаемое расстояние,  $t$  — общее время, а «обычное» красное смещение  $z = V/c$ . Отсюда сразу следует формула, похожая на формулу (11):

$$z = D/(cT_0 - D),$$

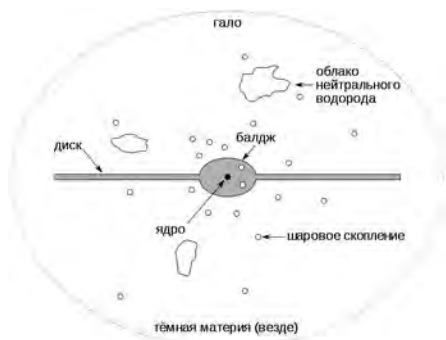
где  $T_0$  — время наблюдения. Для полного сходства следует приравнять  $T_0 = 1/H_0$  и  $D = DL$ .

А ведь структура примитивной модели в линейном приближении совпадает с моделью, предложенной в 1960 году Фредом Хойлом.

**ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

Построить шкалу космологических расстояний, позволившую практически исключить рассеяние оценок за счёт учёта наблюдаемых звёздных величин и поправок на гравитационное красное смещение, удалось [24, 30].

Эта чисто метрологическая интерпретация перенесла критерии выбора моделей красного смещения в область описания эффектов без искусственной параметризации и подгонки под данные измерений путём увеличения числа параметров, зачастую не имеющих физического смысла.



**Гало спиральных галактик**

Список «неожиданных результатов» дополнили «неожиданные совпадения». Самые «неожиданные» из них:

1) совпадение апекса движения Солнца, диполей анизотропии микроволнового фона, параметра замедления, красного и фиолетового смещения с полярной галактической осью и крупнейшим структурным элементом наблюдаемой части Вселенной в северном направлении и системой гигантских пустот в южном направлении галактической оси,

2) совпадение максимума эквивалентного эффекту Доплера ускорения «расширения Вселенной» в интерполяционной модели космологического красного смещения с разрывом 2-го рода с эпохой «начала ускоренного расширения Вселенной», а минимума — с «аномальным ускорением» космических аппаратов Pioneer,

3) совпадение собственного красного смещения квазаров с гравитационным эффектом,

4) совпадение результата введения поправки на собственное красное смещение квазаров с гипотезой изотропии шкалы расстояний,

5) совпадение интерполяционной модели с примитивной моделью разлета с постоянными скоростями при учете запаздывания и ограничении радиуса действия гравитации.



1999 г., X Российская гравитационная конференция, Владимир: Профессор В.Б. Брагинский и ныне д.т.н. Л.В. Грунская

Гипотезы о природе космологического красного смещения высказывал в начале прошлого века Поль Дирак, полагая его следствиями изменения гравитационной постоянной, «старения» фотонов или потерь энергии на преодоление сопротивления среды. Причиной космологического красного смещения в качестве альтернатив «расширению Вселенной», назывались вязкость эфира, спонтанная радиолуминесценция атомов водорода, флуктуации вакуума и эффект потери кинетической энергии, переходящей в энергию флуктуаций вакуума и многое др.

И самая простая гипотеза — «затухание темной природы», пропорциональное пройденному светом расстоянию.

И даже самая примитивная гипотеза — разлёт фрагментов Big Bang с постоянной скоростью без учёта гравитации с учётом запаздывания.

Тем не менее, несмотря на обилие гипотез, однозначно физическая природа космологического красного смещения до сих пор космологами так и не установлена.

Особая благодарность Владимиру Борисовичу Брагинскому за поддержку этой работы с 1999 года.

**ЛИТЕРАТУРА**

1. Perlmutter S. et al. Measurements of  $\Omega$  and  $\Lambda$  from 42 high-red shift supernovae // *Astrophysical J.*, 1999, 517, 565.
2. Schmidt Brian P. et al. The High-Z Supernova Search: Measuring Cosmic Deceleration and Global Curvature of the Universe Using Type Ia Supernovae // *Astrophysical J.*, 1998, 507, 468.
3. Riess A.G. et al. Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant // *Astronomical J.*, 1998, 116, 1009.
4. Freedman W.L. et al. Final Results from the Hubble Space Telescope Key Project to Measure the Hubble Constant // *Astrophysical J.*, 2001, 553, 47.
5. Preprint WMAP/wmap\_9yr\_cosmology\_results. 19 XII 2012.
6. Manuscript of Planck Mission 2013. [http://arXiv:1303.5062v1\[astro-ph.CO\]](http://arXiv:1303.5062v1[astro-ph.CO]) 20 III 2013.
7. Ленг К. Астрофизические формулы. В 2-х частях. Пер. с англ. М.: Мир, 1978.
8. Riess A.G. et al. A re determination of the Hubble constant with the Hubble space telescope from a differential distance ladder. [http://arXiv:0905.0695v1\[astro-ph.CO\]](http://arXiv:0905.0695v1[astro-ph.CO]) 5 V 2009.
9. Cai R.-G., Tuo Zh.-L. Direction Dependence of the Deceleration Parameter // arXiv: 1109. 0941v5 [astro-ph.CO] 11 I 2012.
10. Вероятность и математическая статистика. Энциклопедия. М.: БРЭ, 1999.
11. Сажин М.В. Анизотропия и поляризация реликтового излучения // УФН, 2004, 174/2, 197.
12. Hinshaw G. et al. 9-year Wilkinson microwave anisotropy probe (WMAP) observations: Cosmological parameter results. Preprint WMAP // wmap\_9yr\_cosmology\_results. 19 XII 2012.

13. Левин С.Ф. Анизотропия красного смещения // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 2011, 8, 1/15, 147.
14. Hubble E. A relation between distance and radial velocity among extragalactic nebulae//*Proc. NAS*, 1929, 15, 168.
15. Макаров Д.И. Движения галактик на малых и больших масштабах. Нижний Архыз: САО РАН, 2000.
16. Левин С.Ф. Оптимальная интерполяционная фильтрация статистических характеристик случайных функций в детерминированной версии метода Монте-Карло и закон красного смещения. М.: АН СССР, 1980.
17. Гурский Е.И. Теория вероятностей с элементами математической статистики. М.: Высшая школа, 1971.
18. Р 50.2.004–2000. ГСИ. Определение характеристик математических моделей зависимостей между физическими величинами при решении измерительных задач. Основные положения.
19. Arp H. Quasars, Red Shifts and Controversies. Berkeley: Cambridge University, 1989.
20. Бербидж Дж., Бербидж М. Квазары. М.: Мир, 1969.
21. Брагинский В.Б., Панов В.И. Проверка эквивалентности инертной и гравитационной масс // *Журнал экспериментальной и теоретической физики*, 1971, 61, 873–880.
22. Хайдаров К.А. Температура эфира и красные смещения. [http://www.inauka/blogs/article\\_78500.html](http://www.inauka/blogs/article_78500.html). 9 IV 2009.
23. Левин С.Ф. Измерительные задачи статистической идентификации шкалы космологических расстояний // *Измерительная техника*, 2011, 12, 17.
24. Левин С.Ф. Шкала космологических расстояний на основе интерполяционной модели красного смещения // *Измерительная техника*, 2012, 6, 12.
25. Roberts M.S., Rots A.H. Comparison of rotation curves of different galaxy types // *Astronomy & Astrophysics*, 1973, 26, 483.
26. Засов А.В., Постнов К.А. Общая астрофизика DJVU. Фрязино: Век 2, 2006.
27. Arp H. How Non-velocity red shifts in Galaxies Depend on Epoch of Creation // *APEIRON*. Winter-Spring, 1991, 9-10, 53.
28. Turyshv S.G. The Pioneer Anomaly: Effect, New Data and New Investigation // *Seminar at the Sternberg Astronomical Institute Moscow State University, Moscow*, 6 February 2007. 23 p.
29. Turyshv S. Support for temporally varying behavior of the Pioneer anomaly from the extended Pioneer 10 and 11 Doppler data sets, [http://arXiv:1107.2886v1\[gr-qc\]](http://arXiv:1107.2886v1[gr-qc]), 14.07.2011.
30. Левин С.Ф. Статистические методы решения измерительных задач космологии и гравитации // *Международная сессия-конференция секции ядерной физики ОФН РАН «Физика фундаментальных взаимодействий»*. Москва, 12–16 XI 2012 г. [http://www.ic-ssnp.mephi.ru/content/file/symposium/1/SC&G\\_13\\_levin.pdf](http://www.ic-ssnp.mephi.ru/content/file/symposium/1/SC&G_13_levin.pdf). ☐